**Attenzione: Riconsegnate un foglio (protocollo bianco, a 4 facciate), scrivete chiaramente cognome e nome. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.**

**1** Si consideri la Trasformazione Canonica:

$$T^*\mathbb{R}^1 \longrightarrow T^*\mathbb{S}^1, \qquad (q,p) \longmapsto (\tilde{q}, \tilde{p})$$

generata da

$$F(q,\tilde{q}) = a\ q^2\ \tan\tilde{q} \qquad\qquad (\tan:\ \text{tangente trigonometrica})$$

(di che tipo è? $F_1$? $F_2$?) determinare il valore della costante reale $a$ affinché essa generi una T.C. 1-valente che trasforma l'Hamiltoniano dell'oscillatore armonico $H(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}q^2$ in $K = \omega\tilde{p}$.

**2** Teorema di Noether, enunciato e dimostrazione.

**3** Dato il sistema dissipativo seguente

$$m\ddot{q} = -\nabla U(q) - k\dot{q}, \qquad\qquad m,k>0, \quad q\in\mathbb{R}^3$$

si può costruire per esso una formulazione variazionale Lagrangiana? $L(q,...) = ...$? In caso non si potesse, enunciare e dimostrare il principio variazionale di Hamilton.

Soluzione all'esercizio

Si tratta di una candidata funzione generatrice di tipo $F_1(q,\tilde{q})$ indipendente dal tempo, pertanto $K_0 \equiv 0$. Imponendo $c = 1$, la trasformazione in forma mista si scrive:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} : \qquad\qquad p = 2aq \tan\tilde{q}$$

$$\tilde{p} = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}} : \qquad\qquad \tilde{p} = -a\ q^2 \frac{1}{\cos^2\tilde{q}}$$

$$K(\tilde{q},\tilde{p}) = H(q(\tilde{q},\tilde{p}), p(\tilde{q},\tilde{p})) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} q^2 \Big|_{q(\tilde{q},\tilde{p}),p(\tilde{q},\tilde{p})} =$$

$$= \frac{1}{2} 4a^2 (-\frac{\tilde{p}}{a} cos^2\tilde{q}) \tan^2\tilde{q} + \frac{\omega^2}{2}(-\frac{\tilde{p}}{a} cos^2\tilde{q}) =$$

$$= -2a\tilde{p}\sin^2\tilde{q} - \frac{\omega^2}{2}\frac{\tilde{p}}{a} cos^2\tilde{q} = \omega\tilde{p} \quad \text{se e solo se} \quad a = -\frac{\omega}{2}$$

si noti che la trasformazione ha evidentemente un carattere locale, $T^*\mathbb{R}^1$ non è globalmente diffeomorfo a $T^*\mathbb{S}^1$.

Teorema di Noether: vedi dispensa.

Si verifica con un conto diretto che la Lagrangiana cercata è $L(q,\dot{q},t) = e^{\frac{k}{m}t}(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q))$, è nella dispensa.